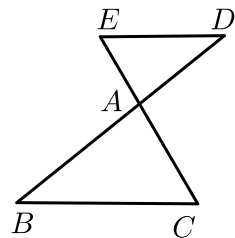


相似三角形的基本模型（二）（练习）

一、8字型

1. 如图， $DE \parallel BC$ ， $DE : BC = 4 : 5$ ，则 $EA : AC =$ _____.



【答案】 4 : 5

【解析】 $\because DE \parallel BC$,

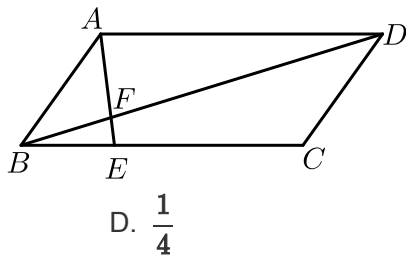
$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \frac{EA}{AC} = \frac{DE}{BC} = \frac{4}{5},$$

故答案为4 : 5.

【标注】 【知识点】 相似8字型

2. 如图， F 是平行四边形 $ABCD$ 对角线 BD 上的点， $BF : FD = 1 : 3$ ，则 $BE : EC =$ () .



A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{2}{3}$

D. $\frac{1}{4}$

【答案】 A

【解析】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle BFE \sim \triangle DFA,$$

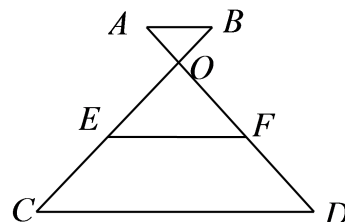
$$\therefore BE : AD = BF : FD = 1 : 3,$$

$$\therefore BE : EC = BE : (BC - BE) = BE : (AD - BE) = 1 : (3 - 1),$$

$$\therefore BE : EC = 1 : 2.$$

【标注】【知识点】相似8字型

3. 如图, $AB \parallel CD$, $BO : OC = 1 : 4$, 点 E 、 F 分别是 OC 、 OD 的中点, 则 $EF : AB$ 的值为 () .



- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【答案】B

【解析】 $\because$ 点 E 、 F 分别是 OC 、 OD 的中点

$$\therefore EF \parallel CD$$

$$\text{又} \because AB \parallel CD,$$

$$\therefore \triangle ABO \sim \triangle FEO,$$

$$\therefore EF : AB = EO : BO$$

$$\text{又} BO : OC = 1 : 4$$

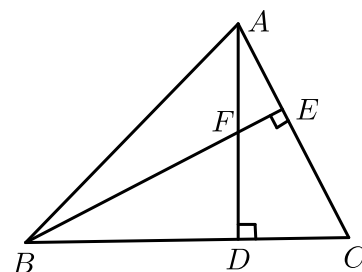
$$\therefore OE = \frac{1}{2}OC$$

$$\therefore OE = 2OB$$

$$\therefore EF : AB = 2 : 1.$$

【标注】【知识点】相似8字型

4. 如图, 已知 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 45^\circ$, $AD \perp BC$ 于点 D , $BE \perp AC$ 于点 E , F 是 AD 和 BE 的交点, $CD = 4$, 则线段 DF 的长度为 () .



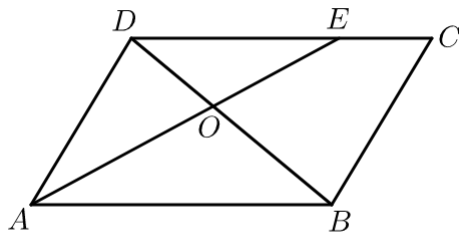
- A. 4 B. $3\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{2}$ D. 3

【答案】 A

【解析】 $\because AD \perp BC, BE \perp AC,$
 $\therefore \angle BDF = \angle AEB = 90^\circ,$
由8字模型可得： $\angle DBF = \angle DAC,$
 $\because \angle ABC = 45^\circ, \therefore \angle DAB = 45^\circ,$
 $\therefore BD = AD, \therefore \triangle BDF \cong \triangle ADC,$
 $\therefore DF = CD = 4.$

【标注】 【知识点】 ASA

5. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， E 为 DC 上的一点， AE 交 BD 于 O ， $\triangle AOB \sim \triangle EOD$ ，若 $DE = \frac{2}{3}AB$ ， $AB = 9$ ， $AO = 6$ ，求 DE 和 AE 的长．

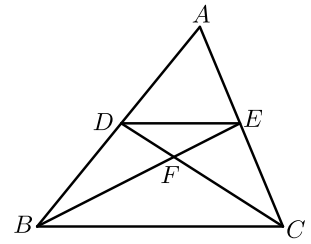


【答案】 $DE = 6, AE = 10.$

【解析】 $\because \triangle AOB \sim \triangle EOD,$
 $\therefore AB : DE = OA : OE,$
 $\therefore DE = \frac{2}{3}AB, AB = 9, AO = 6,$
 $\therefore DE = \frac{2}{3} \times 9 = 6, OE = \frac{2}{3}OA = 4,$
 $\therefore AE = OA + OE = 6 + 4 = 10.$

【标注】 【知识点】 相似8字型

6. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， D 、 E 分别为 AB 、 AC 边上的点， $DE \parallel BC$ ， BE 与 CD 相交于点 F ，则下列结论一定正确的是（ ）．



A. $\frac{DF}{BF} = \frac{EF}{FC}$
 C. $\frac{DF}{FC} = \frac{AE}{AC}$

B. $\frac{AD}{AB} = \frac{EC}{AC}$
 D. $\frac{AD}{DB} = \frac{DE}{BC}$

【答案】 C

【解析】 $\because DE \parallel BC$,

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC},$$

故B, D错误,

$$\because DE \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle DEF \sim \triangle CBF,$$

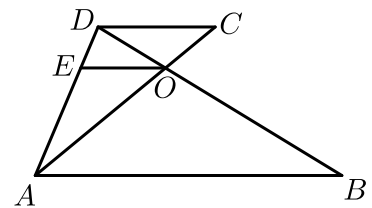
$$\therefore \frac{DF}{FC} = \frac{EF}{BF} = \frac{DE}{BC}, \text{ 故A错误,}$$

$$\therefore \frac{DF}{FC} = \frac{AE}{AC}, \text{ 故C正确,}$$

故选: C.

【标注】 【知识点】 相似8字型

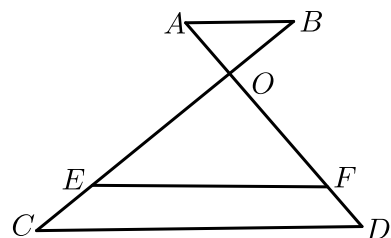
7. 如图, $EO \parallel DC \parallel AB$, $EO = 3$, $CD = 4$, 那 $AB =$ _____.



【答案】 12

【标注】 【知识点】 相似8字型

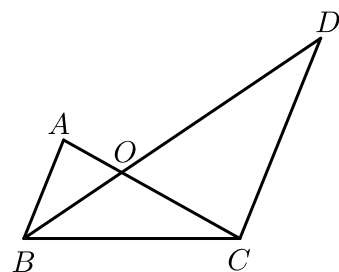
8. 如图, AD 、 BC 相交于点 O , 点 E 、 F 分别在 BC 、 AD 上, $AB \parallel CD \parallel EF$, 如果 $CE = 2$, $EB = 5$, $AF = 3$, 那么 $AD =$ _____.



【答案】 $\frac{21}{5}$

【标注】【知识点】相似三角形的性质与判定综合

9. 如图， BO 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，延长 BO 至 D 使得 $BC = CD$ 。



- (1) 求证： $\triangle AOB \sim \triangle COD$.
 (2) 若 $AB = 2$ ， $BC = 4$ ， $OA = 1$ ，求 OC 长。

【答案】 (1) 证明见解析。

(2) 2 .

【解析】 (1) $\because BC = CD$,

$$\therefore \angle CBD = \angle D ,$$

$$\text{又} \because \angle ABD = \angle CBD ,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle D ,$$

$$\text{又} \because \angle AOB = \angle COD ,$$

$$\therefore \triangle AOB \sim \triangle COD .$$

(2) $\because \triangle AOB \sim \triangle COD$,

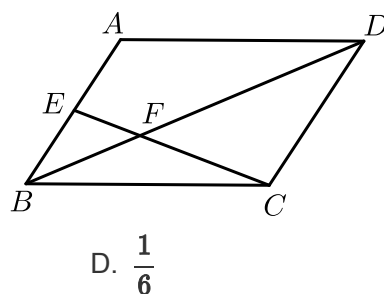
$$\therefore \frac{AB}{CD} = \frac{OA}{OC} ,$$

$$\because AB = 2 , BC = CD = 4 , OA = 1 ,$$

$$\therefore OC = 2 .$$

【标注】【知识点】相似8字型

10. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， E 是 AB 的中点， EC 交 BD 于点 F ，则 $\triangle BEF$ 与 $\triangle DCB$ 的面积比为（ ）.



A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{5}$

D. $\frac{1}{6}$

【答案】 D

【解析】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形， E 为 AB 的中点，

$$\therefore AB = DC = 2BE, AB \parallel CD.$$

$$\therefore \triangle BEF \sim \triangle DCF.$$

$$\therefore \frac{BE}{DC} = \frac{BF}{DF} = \frac{1}{2}.$$

$$\therefore DF = 2BF, \frac{S_{\triangle BEF}}{S_{\triangle DCF}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle DCF}}{S_{\triangle DCB}} = \frac{2}{3}.$$

$$\therefore S_{\triangle BEF} = \frac{1}{4} S_{\triangle DCF}, S_{\triangle DCB} = \frac{3}{2} S_{\triangle DCF}.$$

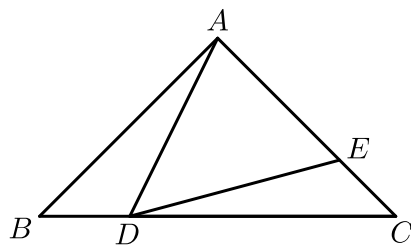
$$\therefore \frac{S_{\triangle BEF}}{S_{\triangle DCB}} = \frac{\frac{1}{4} S_{\triangle DCF}}{\frac{3}{2} S_{\triangle DCF}} = \frac{1}{6}.$$

故选：D.

【标注】【知识点】相似8字型

二、一线三等角

11. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， D 是 BC 上的一点， DE 交 AC 于 E ，使 $\angle ADE = \angle B$ ，则图中的相似三角形有 _____ 对.



【答案】 2

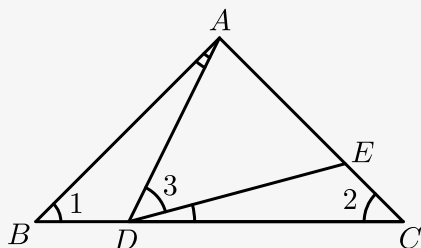
【解析】 如图， $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$ ，

$$\therefore \angle BAD + \angle BDA = \angle CDE + \angle BDA,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle CDE,$$

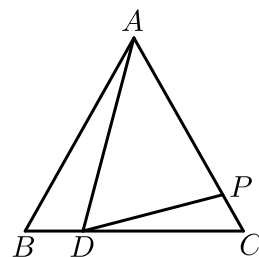
$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle DCE; \triangle ADE \sim \triangle ACD,$$

故答案为：2.



【标注】 【知识点】 一线三等角相似

12. 如图，在等边 $\triangle ABC$ 中， D 为 BC 边上的一点， P 为 AC 边上的一点， $\angle ADP = 60^\circ$ ， $BD = 1$ ， $CP = \frac{2}{3}$ ，则 $\triangle ABC$ 的边长为 _____.



【答案】 3

【解析】 $\because \triangle ABC$ 是等边三角形，

$$\therefore \angle B = \angle C = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ADP = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle CDP + \angle CPD = 120^\circ, \angle CDP + \angle ADB = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle ADB = \angle CPD,$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle DCP,$$

$$\therefore \frac{AB}{CD} = \frac{BD}{CP},$$

$$\therefore BD = 1, CP = \frac{2}{3},$$

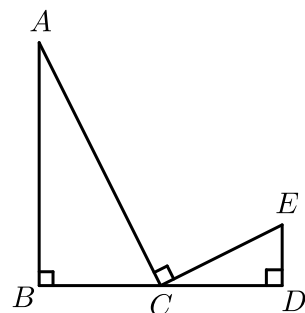
$$\therefore \frac{AB}{AB-1} = \frac{1}{\frac{2}{3}},$$

解得， $AB = 3$.

故答案为：3 .

【标注】【知识点】一线三等角相似

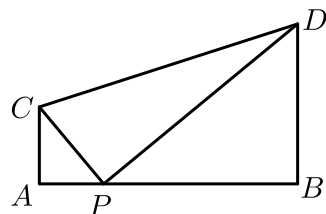
13. 如图， $AB \perp BD$ ， $ED \perp BD$ ， C 是线段 BD 的中点，且 $AC \perp CE$ ， $ED = 2$ ， $AB = 6$ ，那么 $BD =$ _____ .



【答案】 $4\sqrt{3}$

【标注】【知识点】一线三等角相似

14. 如图， $AC \perp AB$ ， $BD \perp AB$ ， $AB = 10$ ， $AC = 2$. 用一个三角尺进行如下操作：将直角顶点 P 在线段 AB 上滑动，一直角边始终经过点 C ，另一直角边与 BD 相交于点 D ，若 $BD = 8$ ，求 AP 的长 .



【答案】2或8 .

【解析】 $\because AC \perp AB$ ， $BD \perp AB$ ，

$$\therefore \angle A = \angle B = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle APC + \angle ACP = 90^\circ ,$$

$$\because \angle CPD = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle APC + \angle DPB = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle DPB = \angle ACP ,$$

$$\therefore \triangle CAP \sim \triangle PBD ,$$

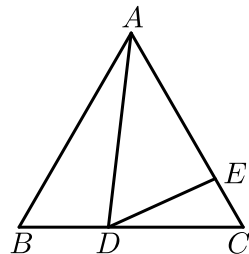
$$\therefore AC : AP = BP : BD ,$$

$$\therefore 2 : AP = (10 - AP) : 8 ,$$

解得 $AP = 2$ 或 8 .

【标注】【知识点】一线三等角相似

15. 如图，在等边 $\triangle ABC$ 中， D 为 BC 边上一点， E 为 AC 边上一点，且 $\angle ADB + \angle EDC = 120^\circ$.



(1) 求证： $\triangle ABD \sim \triangle DCE$.

(2) 若 $CD = 12$ ， $CE = 3$ ，求 $\triangle ABC$ 的周长 .

【答案】(1) 证明见解析 .

(2) 48 .

【解析】(1) $\because \triangle ABC$ 是等边三角形，

$$\therefore \angle B = \angle C = 60^\circ ,$$

$$\therefore \angle BAD + \angle ADB = 120^\circ ,$$

$$\because \angle ADB + \angle EDC = 120^\circ ,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle EDC ,$$

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle DCE$ 中，

$$\begin{cases} \angle B = \angle C \\ \angle BAD = \angle CDE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle DCE .$$

(2) $\because \triangle ABC$ 是等边三角形，

$$\therefore AB = AC = BC ,$$

$$\text{设 } BD = x ,$$

$$\because CD = 12 , CE = 3 ,$$

$$\therefore BC = CD + BD = 12 + x ,$$

$$\therefore AB = BC = AC = 12 + x ,$$

由 (1) 知， $\triangle ABD \sim \triangle DCE$ ，

$$\begin{aligned} \therefore \frac{AB}{DC} &= \frac{BD}{CE} , \\ \therefore \frac{12+x}{12} &= \frac{x}{3} , \end{aligned}$$

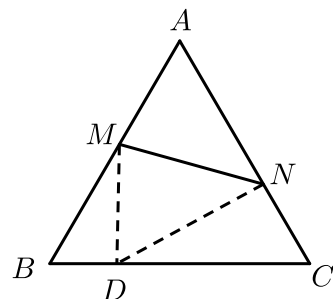
$$\text{解得 } x = 4 ,$$

$$\therefore AB = BC = AC = 16 ,$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 的周长} = 16 \times 3 = 48 .$$

【标注】【知识点】相似三角形的性质与判定综合

16. 如图，等边 $\triangle ABC$ ， D 是 BC 边上的一点，且 $BD : DC = 1 : 3$ ，把 $\triangle ABC$ 折叠，使点 A 落在 BC 边上的点 D 处，求 $\frac{AM}{AN}$ 的值。

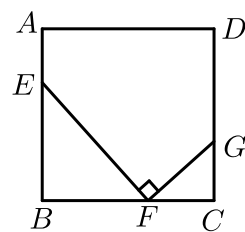


【答案】 $\frac{5}{7}$.

【解析】 设 $BD = a$ ， $DC = 3a$ ，则 $AB = AC = BC = 4a$ ，由翻折可得， $AM = DM$ ， $AN = DN$ ， $\angle MDN = \angle A = 60^\circ$ ，由一线三等角相似可得 $\triangle MBD \sim \triangle DCN$ ， $\therefore \frac{C_{\triangle MBD}}{C_{\triangle DCN}} = \frac{MD}{DN}$ ，即 $\frac{5a}{7a} = \frac{MD}{DN}$ ， $\therefore \frac{AM}{AN} = \frac{5}{7}$.

【标注】【知识点】相似三角形的性质与判定综合

17. 如图，正方形 $ABCD$ 中，点 E ， F ， G 分别在 AB ， BC ， CD 上，且 $\angle EFG = 90^\circ$ ；求证： $\triangle EBF \sim \triangle FCG$.



【答案】 证明见解析 .

【解析】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形，
 $\therefore \angle B = \angle C = 90^\circ$ ，
 $\therefore \angle BEF + \angle BFE = 90^\circ$ ，
 $\because \angle EFG = 90^\circ$ ，
 $\therefore \angle BFE + \angle CFG = 90^\circ$ ，

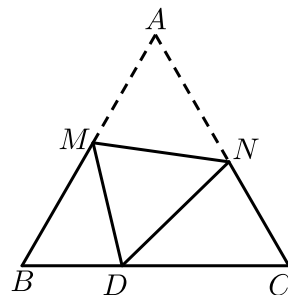
$$\therefore \angle BEF = \angle CFG .$$

$$\therefore \angle B = \angle C = 90^\circ ,$$

$$\therefore \triangle EBF \sim \triangle FCG .$$

【标注】【知识点】一线三等角相似

18. 如图，将边长为4的等边三角形沿 MN 折叠，点 A 恰好落在 BC 边上的点 D 处，已知 $AM : AN = 2 : 3$ ，求 CD 的长 .



【答案】 $CD = \frac{16}{5} .$

【解析】 $\because AM : AN = 2 : 3 ,$

$$\therefore \text{设 } AM = 2k , AN = 3k ,$$

$$\because \triangle ABC \text{ 边长为 } 4 ,$$

$$\therefore MB = 4 - 2k , NC = 4 - 3k ,$$

$$\because \triangle AMN \cong \triangle DMN ,$$

$$\therefore DM = AM = 2k , DN = AN = 3k ,$$

$$\because \angle MDN = \angle A = 60^\circ ,$$

$$\therefore \angle MDB + \angle NDC = 120^\circ ,$$

$$\because \angle C = 60^\circ ,$$

$$\therefore \angle NDC + \angle DNC = 120^\circ ,$$

$$\therefore \angle DNC = \angle MDB ,$$

$$\therefore \triangle BMD \sim \triangle CDN ,$$

$$\therefore BM : CD = BD : CN = MD : DN = 2 : 3 ,$$

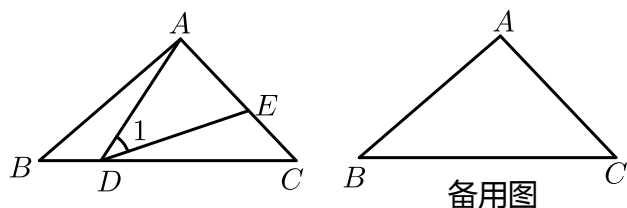
$$\therefore BD = \frac{2}{3} NC = \frac{8}{3} - 2k , CD = \frac{3}{2} MB = 6 - 3k ,$$

$$\text{于是 } \frac{8}{3} - 2k + 6 - 3k = 4 , \text{ 解得 : } k = \frac{14}{15} ,$$

$$\therefore CD = \frac{16}{5} .$$

【标注】【知识点】一线三等角相似

19. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 分别在边 BC 、 AC 上，连接 AD 、 DE ，且 $\angle 1 = \angle B = \angle C$ 。



(1) 由题设条件，请写出三个正确结论：(要求不再添加其他字母和辅助线，找结论过程中添加的字母和辅助线不能出现在结论中，不必证明)

答：结论一：_____。

结论二：_____。

结论三：_____。

(2) 若 $\angle B = 45^\circ$ ， $BC = 2$ ，当点 D 在 BC 上运动时(点 D 不与 B 、 C 重合)，

① 求 CE 的最大值。

② 若 $\triangle ADE$ 是等腰三角形，求此时 BD 的长。

(注意：在第(2)的求解过程中，若有运用(1)中得出的结论，须加以证明)

【答案】 (1) $AB = AC$ ； $\angle AED = \angle ADC$ ； $\triangle ADE \sim \triangle ACD$ 。

(2) ① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

② 1或 $2 - \sqrt{2}$ 。

【解析】 (1) $AB = AC$ ， $\angle AED = \angle ADC$ ， $\triangle ADE \sim \triangle ACD$ 。

(2) ① $\because \angle B = \angle C$ ， $\angle B = 45^\circ$ ，

$\therefore \triangle ACB$ 为等腰直角三角形，

$\therefore AC = \frac{\sqrt{2}}{2} BC = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 2 = \sqrt{2}$ ，

$\because \angle 1 = \angle C$ ， $\angle DAE = \angle CAD$ ，

$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ACD$ ，

$\therefore AD : AC = AE : AD$ ，即 $AD^2 = AE \cdot AC$ ，

$\therefore AE = \frac{AD^2}{AC} = \frac{AD^2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot AD^2$ ，

当 AD 最小时， AE 最小，此时 $AD \perp BC$ ， $AD = \frac{1}{2} BC = 1$ ，

$\therefore AE$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{2}}{2} \times 1^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，

$\therefore CE$ 的最大值 $= \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

② 当 $AD = AE$ 时，

$\therefore \angle 1 = \angle AED = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle DAE = 90^\circ$ ，

∴点D与B重合，不合题意舍去，

当 $EA = ED$ 时，如图1，

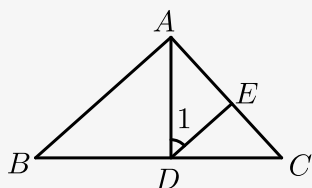


图 1

∴ $\angle EAD = \angle 1 = 45^\circ$ ，

∴AD平分 $\angle BAC$ ，

∴AD垂直平分BC，

∴ $BD = 1$ ，

当 $DA = DE$ 时，如图2，

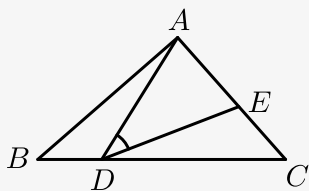


图 2

∴ $\angle 1 = \angle C, \angle DAE = \angle CAD$

∴ $\triangle ADE \sim \triangle ACD$ ，

∴ $DA : AC = DE : DC$ ，

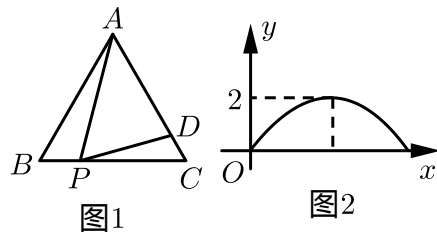
∴ $DC = CA = \sqrt{2}$ ，

∴ $BD = BC - DC = 2 - \sqrt{2}$ ，

∴综上所述，当 $\triangle ADE$ 是等腰三角形时，BD的长为1或 $2 - \sqrt{2}$ 。

【标注】【知识点】相似三角形中的动点问题

20. 如图1，在等边三角形ABC中，点P为BC边上的任意一点，且 $\angle APD = 60^\circ$ ，PD交AC于点D，设线段PB的长度为x，CD的长度为y，若y与x的函数关系的大致图象如图2，则等边三角形ABC的面积为_____。



【答案】 $16\sqrt{3}$

【解析】 由题可得, $\angle APD = 60^\circ$, $\angle ABC = \angle C = 60^\circ$,

$$\therefore \angle BAP = \angle CPD,$$

$$\therefore \triangle ABP \sim \triangle PCD,$$

$$\therefore \frac{AB}{BP} = \frac{PC}{CD},$$

$$\text{设 } AB = a, \text{ 则 } \frac{a}{x} = \frac{a-x}{y},$$

$$\therefore y = \frac{-x^2 + ax}{a},$$

$$\text{当 } x = \frac{1}{2}a \text{ 时, } y \text{ 取得最大值 } 2,$$

即 P 为 BC 中点时, CD 长度的最大值为 2,

$$\therefore \text{此时 } \angle APB = \angle PDC = 90^\circ, \angle CPD = 30^\circ,$$

$$\therefore PC = BP = 4,$$

$\therefore$ 等边三角形的边长为 8,

$$\therefore \text{根据等边三角形的性质, 可得 } S = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 8^2 = 16\sqrt{3}.$$

故答案为: $16\sqrt{3}$.

【标注】 【知识点】一线三等角相似